# Двенадцатиричный путь

Налютин Н. Ю.
К2-223

# Класс задач A

Элементы совокупности N различимы
Элементы совокупности K различимы

Map(N,K)
Произвольная функция
Без ограничения на занятость ящиков

| $\overline{P}_k^n$ |
| --- |
| $\overline{P}_k^n = k^n$ |

$$\overline{P}_k^n = \sum_{\sum_{i=1}^k n_i = n (n_i \geq 0)} \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} = \sum_{\sum_{i=1}^k n_i = n (n_i \geq 0)} P(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

$$\overline{P}_k^n = \sum_{j=0}^n C_k^j j! S(n, j)$$

$$\overline{P}_k^n = k \overline{P_k^{n-1}}$$

нач.усл. $\overline{P}(n, 1) = n\overline{P}(1, n) = 1$

$$\overline{P}_k^n = \sum_{r=0}^n S(n, r) P_k^r$$

$$\overline{P}_k^n = E^{(k)} \oslash^n$$

$$\overline{P}_k^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (k-1)^{n-i}$$

$$E(t) = (1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + ...)^k = e^{kt} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P}_k^n \frac{t^n}{n!}$$

Inj(N,K)
Инъективная функция
В каждом ящике либо один элемент, либо ни одного

| $P_k^n$ |
| --- |

$$P_k^n = nP_{k-1}^{n-1} + P_{k-1}^n$$

$$P_k^n = k(k-1)\dots(k-n+1)$$

$$P_k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$$

$$P_k^n = n!C_k^n$$
$$P_k^n = n!C_k^{k-n}$$

$$P_k^n = n!(C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^n)$$

$$P_k^n = n!(\overline{C_n^{k-n}} + \overline{C_{n+1}^{k-n-1}})$$

$$P_k^n = C_k^n \sum_{r=0}^{n} D_{n,r}$$

$$P_k^n = \frac{D_n C_k^n}{[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}]}$$

$$P_k^n = C_k^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_n^r (n-r)^n$$

$$P_k^n = C_k^n \sum_{r=0}^{n} C_n^r D_{n-r}$$

$$P_k^n = \frac{P_k^k}{P_{k-n}^{k-n}}$$

$$P_k^n = P_n^n C_k^n$$

$$E(t) = (1+t)^k = \sum_{n=0}^{k} P_k^n \frac{t^n}{n!}$$

Sur(N,K)
Сюръективная функция
Все ящики заняты, ни один ящик не пуст

---

$k!S(n,k)$

---

$$k!S(n,k) = \sum_{\sum_{i=1}^{k} n_i = n (n_i \geq 1)} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

$$k!S(n,k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

$$k!S(n,k) = \Delta^k \oslash^n$$

$$k!S(n,k) = \sum_{r=0}^{k} C_k^r (k-r)^n (-1)^r$$

$$k!S(n,k) = k![S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)]$$
$$S(n,0) = 0, n > 0; S(n,n) = 1, n \geq 0$$

$$k!S(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1} S(i,k-1) k^{n-i} k!$$

$$E(t) = (\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots) = (e^t - 1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} k!S(n,k) \frac{t^n}{n!}$$

# Класс задач B

## Элементы совокупности N различимы

## Элементы совокупности K неразличимы

Map(N,K)
Произвольная функция
Без ограничения на занятость ящиков

| $\overline{C}_k^n$ |
|---|
| $$\overline{C}_k^n = \overline{C}_k^{n-1} + \overline{C}_{k-1}^n$$ $$\overline{C}_k^n = C_{k+n-1}^n$$ $$\overline{C}_k^n = C_{k+n-1}^{k-1}$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{P_{k+n-1}^n}{n!}$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{P_{k+n-1}^{k-1}}{(k-1)!}$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!}$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{P_{k+n-1}^n}{\sum_{r=0}^n D_{n,r}} = \frac{P_{k+n-1}^n}{\sum_{r=0}^n C_n^r D_{n-r}}$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{P_{k+n-1}^n}{D_n}[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}]$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{P_{k+n-1}^n}{(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})}[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}]$$ $$\overline{C}_k^n = \frac{P_{k+n-1}^n}{\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r C_n^r (n-r)^n}$$ $$A(t) = (1-t)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C}_k^n t^n$$ |

Inj(N,K)

Инъективная функция

В каждом ящике либо один элемент, либо ни одного

| $C_k^n$ |
| --- |

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^n$$

$$C_k^n = C_k^{k-n}$$

$$C_k^n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} = \frac{P(k,n)}{n!}$$

$$C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

$$C_k^n = \overline{C}_{k-n+1}^n$$

$$C_k^n = \overline{C}_{n+1}^{k-n}$$

$$C_k^n = \overline{C}_{k-n}^n + \overline{C}_{k-n+1}^{n-1}$$

$$C_k^n = \overline{C}_{n+1}^{k-n-1} + \overline{C}_n^{k-n}$$

$$C_k^n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)\frac{k^i}{n!}$$

$$C_k^n = \frac{nP_{k-1}^{n-1} + P_{k-1}^n}{n!}$$

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{\sum_{r=0}^n D_{n,r}} = \frac{P_k^n}{\sum_{r=0}^n C_n^r D_{n-r}}$$

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r C_n^r (n-r)^n}$$

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{P_n^n}$$

$$C_k^n = \sum_{r=0}^{n} C_{k-n+r-1}^r$$

$$C_k^n = \sum_{r=n-1}^{k-1} C_r^{n-1}$$

$$C_k^n = \frac{k}{n} C_{k-1}^{n-1}$$

$$C_k^n = \frac{k}{k-n} C_{k-1}^n$$

$$C_{m+n}^l = \sum_{r=1}^{l} C_m^r C_m^{l-r}$$

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{D_n}[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}]$$

$$A(t) = (1+t)^k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n t^n$$

Sur(N,K)
Сюръективная функция
Все ящики заняты, ни один ящик не пуст

| $\overline{C}_k^{n-k}$ |
|---|

$$\overline{C}_k^{n-k} = C_{n-1}^{n-k}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = C_{n-1}^{k-1}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \overline{C}_k^{n-k-1} + \overline{C}_{k-1}^{n-k}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{P_{n-1}^{k-1}}{D_{k-1}}[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}] = \frac{P_{n-1}^{k-1}}{\sum_{r=0}^{n-r}(-1)^r C_{k-1}^r (k-r-1)^{k-1}}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{P_{n-1}^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{P_{n-1}^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{k!}{n!}L(n,k)$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{P_{n-1}^{k-1}}{\sum_{r=0}^{k-1} D_{k-1,r}}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = \frac{P_{n-1}^{k-1}}{\sum_{r=0}^{k-1} C_{k-1}^r D_{k-r-1}}$$

$$\overline{C}_k^{n-k} = C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k-1}$$

$$A(t) = t^k(1-t)^{-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \overline{C}_n^{n-k} t^n$$

# Класс задач C

Элементы совокупности N неразличимы

Элементы совокупности K различимы

Map(N,K)
Произвольная функция
Без ограничения на занятость ящиков

$$S(n,1)+S(n,2)+\ldots+S(n,k)$$

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i-j}C_i^j j^n$$

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\sum_{r=0}^{i}C_i^r(i-r)^n(-1)^r$$

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\sum_{\sum_{j=1}^{i} n_j=n(n_j\geq 1)}\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\Delta^i \oslash^n$$

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)=\sum_{i=1}^{k}[S(n-1,i-1)+iS(n-1,i)]=\sum_{i=1}^{k}S(n-1,i-1)+\sum_{i=1}^{k}iS(n-1,i)$$

Inj(N,K)
Инъективная функция
В каждом ящике либо один элемент, либо ни одного

---

Частный результат

---

1, если $n \leq k$
0, если $n > k$

Sur(N,K)
Сюръективная функция
Все ящики заняты, ни один ящик не пуст

---

$S(n,k)$

---

$$S(n,k) = \sum_{\sum_{i=1}^{k} n_i = n (i=1,2,\ldots,k), n\geq 1} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \frac{1}{k!}$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} C_k^r (k-r)^n (-1)^r$$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

$$0 < k < n; S(n,n) = 1, S(n,0) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k) = B_n$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \Delta^k \oslash^n$$

$$E(t) = \frac{1}{k!} (\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots)^n = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{t^n}{n!}$$

# Класс задач D

## Элементы совокупности N неразличимы
## Элементы совокупности K неразличимы

Map(N,K)
Произвольная функция
Без ограничения на занятость ящиков

---

Частный результат

---

$$P_1(n) + P_2(n) + \ldots + P_n(n)$$

Inj(N,K)
Инъективная функция
В каждом ящике либо один элемент, либо ни одного

---

Частный результат

---

1, если $n \leq k$
0, если $n > k$

Sur(N,K)
Сюръективная функция
Все ящики заняты, ни один ящик не пуст

---

Частный результат

---

$$P_k(n)$$